

渗流分析中排水孔模拟的叠单元法

汪卫明, 刘友良, 丁建新, 殷德胜

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

摘 要: 排水孔是重要的渗控措施, 如何准确模拟排水孔的作用是渗流分析中的关键问题之一。目前普遍采用排水子结构法, 但由于子结构网格依存于整体网格, 在解决复杂工程问题时网格划分难度很大。文中提出一种新的排水孔模拟方法——叠单元法。对于含排水孔的结构, 将其划分为不包含排水孔的整体网格以及各排水孔附近区域的局部网格, 网格之间相互独立。然后, 通过排水孔局部网格的外边界面的虚拟渗流, 实现整体网格与排水孔局部网格的耦合。算例分析的结果表明, 当排水孔局部网格范围大小取为整体网格单元尺寸的 1~3 倍, 外界面渗透系数取为材料渗透系数的 $10^2 \sim 10^3$ 倍时, 所提方法能够准确模拟排水孔的作用。由于叠单元法的网格划分简便易行, 有望广泛应用于复杂工程问题的渗流分析。

关 键 词: 渗流; 排水孔; 叠单元法; 有限单元法

中图分类号: TV 223.4

文献标识码: A

Superposed element method for simulating of drainage holes in seepage analysis

WANG Wei-ming, LIU You-liang, DING Jian-xin, YIN De-sheng

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: The drainage hole is an important seepage control measure, so it is one of the key problems to simulate the effect of the drainage hole in the seepage analysis. Although the substructure method is an effective and popularized method, its mesh generation, which is dependent on the global mesh, is still a difficult task in engineering practice. A novel method named superposed element method (SEM) is proposed to simulate the drainage holes. Firstly, the structure containing drainage holes is divided into two independent meshes. One is the global mesh without drainage holes, and the other is the local mesh of the drainage hole together with its adjacent zone. Then, the two independent meshes are coupled together through the virtual seepage on the outer interface of the local mesh. Finally, two numerical examples are studied, in which the effect of the drainage holes can be simulated accurately. According to the results of the sensitive analysis, the proper range of the local mesh is 1–3 times of the element length in the global mesh; and the permeability coefficient of the outer interface is suggested to be $10^2 \sim 10^3$ times of the material permeability coefficient. Since the mesh generation of the superposed element method is quite simple, the new method is expected to be widely used to solve complicated seepage problems in engineering practice.

Key words: seepage; drainage hole; superposed element method; finite element method

1 引 言

排水孔是重要的渗控措施, 如何准确模拟排水孔的作用是渗流分析中的关键问题之一。由于排水孔的孔径只有 10 cm 左右, 而工程结构(如边坡、洞室、大坝)的尺寸则达数百米, 因此, 在复杂工程问题中对排水孔进行精细模拟的难度较大。

有限单元法是渗流分析的主要方法, 其中的排

水孔模拟方法主要有以沟代井法^[1-3]和排水子结构法^[4-5]。以沟代井法可以等效模拟排水孔幕的作用, 但其等效渗透系数的取值依据及渗流分析结果的准确性有待进一步研究。排水子结构法可以对排水孔进行离散模拟, 但由于子结构网格依存于整体网格, 对排水孔位置、间距、走向等参数变化的适应性较差, 因此, 在进行复杂工程的渗控设计优化时网格划分难度很大。

最近有学者提出排水孔模拟的复合单元法^[6-8], 只需建立不考虑排水孔的整体有限元网格, 然后通过排水孔与单元之间的几何关系判断, 在排水孔穿过的单元上采用多个数学覆盖来描述其渗流场。该方法可以离散模拟排水孔的局部作用, 但其精度仍依赖于整体有限元网格尺寸。

本文借鉴应力应变分析中的裂缝和断层模拟的叠单元法思路^[9-10], 提出渗流分析中排水孔模拟的叠单元法 (superposed element method, SEM)。首先, 研究域被离散为不包含排水孔的整体网格以及各排水孔附近区域的局部网格, 网格之间相互独立。然后, 将整体网格和排水孔局部网格叠加, 对排水孔局部网格中的单元和整体网格中完全未被局部网格覆盖的单元, 采用常规有限元格式; 对整体网格中被局部网格部分覆盖的单元, 采用基于有限元的数值流形格式^[11]。最后, 通过排水孔局部网格的外边界的虚拟渗流, 实现整体网格与排水孔局部网格的耦合。该方法网格划分简便易行, 可离散模拟排水孔, 且计算精度高, 因此有望广泛应用于复杂工程问题的渗流分析。

2 叠单元法

2.1 网格离散

对于图 1(a)所示的含排水孔的结构, 将其离散为不包含排水孔的整体网格见图 1(b)和排水孔附近区域的局部网格, 图 1(c), 网格之间相互独立。由于整体网格中不考虑排水孔的存在, 单元尺寸可以较大, 因此其网格离散简单, 且单元形态易控制。局部网格只用考虑排水孔附近的较小区域, 可以采用较小的单元尺寸对排水孔进行精细模拟。局部网

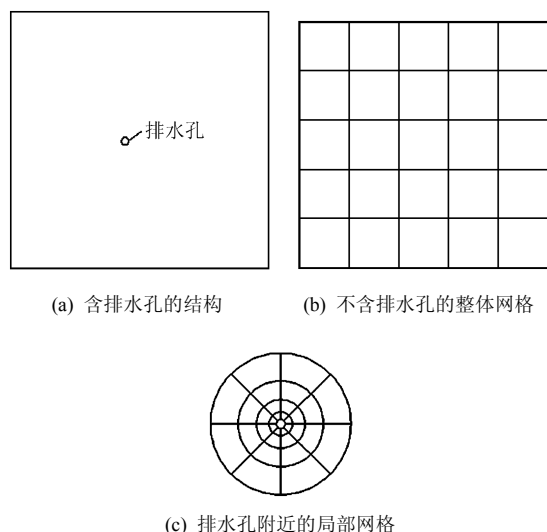


图 1 叠单元法的网格离散示意图

Fig.1 Sketch of mesh generation of SEM

格范围大小的选取原则将在稍后结合具体算例分析进行讨论。

上述网格离散示意图是针对单个排水孔的情况。对于实际工程中的大量排水孔, 如果排水孔间距较大, 可参照单个排水孔的情况, 独立划分各排水孔附近区域的局部网格, 只须保证各排水孔附近区域的局部网格范围互不交叉即可。如果排水孔间距较小, 则可将多个排水孔视为排水孔群, 直接建立同时含多个排水孔的局部网格。

在整体网格和排水孔局部网格均独立划分完成后, 需要将二者叠加起来, 以便统一描述渗流场。图 2 为网格叠加后的示意图。整体网格中被局部网格覆盖的部分 (包括完整单元和残缺单元), 均作为无效单元, 剩下的有效单元分为以下 3 类, A 类: 整体网格中完全不被局部网格覆盖的完整单元; B 类: 整体网格中被局部网格部分覆盖后的残缺单元; C 类: 局部网格中的完整单元。

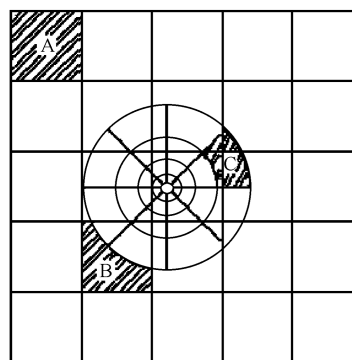


图 2 网格叠加示意图

Fig.2 Sketch of mesh superposition

对上述 A 类和 C 类完整单元, 直接采用常规有限元格式进行渗流场函数离散。对 B 类残缺单元, 因其形状不规则, 可采用基于有限元的数值流形格式, 将原来的完整单元结点作为其虚结点即可实现渗流场函数的离散。

2.2 渗流方程

由于前述整体网格和排水孔局部网格相互独立, 因此在排水孔局部网格的外边界面上处渗流场函数不连续。为实现整体网格与排水孔局部网格的耦合, 需要假定排水孔局部网格的外边界面上存在虚拟渗流, 具体如下: ①假定该界面具有微小的虚拟厚度 t ; ②假定该界面的法向流速沿厚度方向保持不变, 亦即界面上的水头在厚度方向上呈线性变化; ③假定该界面的法向渗透系数 k_n 非常大, 切向渗透系数 $k_s = 0$ 。

理论上, 当虚拟界面厚度 t 趋近于 0、法向渗透

系数 k_n 趋近于 ∞ 时, 界面两侧的渗流场函数趋近于连续。数值分析中的虚拟界面厚度 t 和法向渗透系数 k_n 的取值将在稍后结合具体算例分析进行讨论。

对于整体网格和排水孔局部网格中的有效单元内任意点, 其水头函数可以分别表示为

$$H_G = [N]_G \{ \bar{H} \}_G; H_L = [N]_L \{ \bar{H} \}_L \quad (1)$$

式中: 下标 G 和 L 分别为整体和局部网格; $[N]$ 为形函数矩阵; $\{ \bar{H} \}$ 为结点水头。其渗流方程可分别表示为

$$[K]_G \{ \bar{H} \}_G = \{ F \}_G; [K]_L \{ \bar{H} \}_L = \{ F \}_L \quad (2)$$

式中: $[K]$ 为导水矩阵; $\{ F \}$ 为流量向量。

由于界面的切向渗透系数 $k_s = 0$, 因此界面上的泛函可写为

$$I(H) = \iiint \left(\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial z_j} k_n \frac{\partial H}{\partial z_j} \right) d\Omega_j \quad (3)$$

式中: z_j 为界面的局部法向坐标; Ω_j 为界面体积微元。根据假定, 界面的虚拟厚度 t 微小, 因此其体积微元可写成

$$d\Omega_j = dx_j dy_j t \quad (4)$$

同时, 界面内的法向水头梯度可写为

$$\frac{\partial H}{\partial z_j} = \frac{H_G - H_L}{t} \quad (5)$$

式 (3) 的泛函可改写为

$$I(H) = \iint \left(\frac{1}{2} (H_G - H_L) \frac{k_n}{t} (H_G - H_L) \right) dx_j dy_j \quad (6)$$

将式 (1) 代入式 (6), 并令其对 $\{ \bar{H} \}_G$ 和 $\{ \bar{H} \}_L$ 的 1 阶偏导为 0, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I(H)}{\partial \{ \bar{H} \}_G} &= \iint \left(\frac{k_n}{t} [N]_G^T [N]_G \{ \bar{H} \}_G - \frac{k_n}{t} [N]_G^T [N]_L \{ \bar{H} \}_L \right) \cdot \\ &\quad dx_j dy_j = 0 \\ \frac{\partial I(H)}{\partial \{ \bar{H} \}_L} &= \iint \left(-\frac{k_n}{t} [N]_L^T [N]_G \{ \bar{H} \}_G + \frac{k_n}{t} [N]_L^T [N]_L \{ \bar{H} \}_L \right) \cdot \\ &\quad dx_j dy_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

简记为

$$\left. \begin{aligned} [K]_{GG} \{ \bar{H} \}_G + [K]_{GL} \{ \bar{H} \}_L &= 0 \\ [K]_{LG} \{ \bar{H} \}_G + [K]_{LL} \{ \bar{H} \}_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: $[K]_{GG}$ 、 $[K]_{GL}$ 、 $[K]_{LG}$ 、 $[K]_{LL}$ 为界面的导水矩阵, 反映了界面对整体网格和局部网格的影响, 其计算式为

$$\left. \begin{aligned} [K]_{GG} &= \frac{k_n}{t} \iint ([N]_G^T [N]_G) dx_j dy_j \\ [K]_{LL} &= \frac{k_n}{t} \iint ([N]_L^T [N]_L) dx_j dy_j \\ [K]_{GL} &= [K]_{GL}^T = -\frac{k_n}{t} \iint ([N]_G^T [N]_L) dx_j dy_j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

从式 (9) 中还可以看出, 界面的法向渗透系数 k_n 和虚拟厚度 t 总是以 k_n/t 的形式出现。为便于叙述, 定义 k_n/t 为界面的导水系数, 其取值将在稍后结合具体算例分析进行讨论。

将式 (8) 与式 (2) 叠加可得到整体渗流方程:

$$\left[\begin{array}{cc} [K]_G + [K]_{GG} & [K]_{GL} \\ [K]_{LG} & [K]_L + [K]_{LL} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{ \bar{H} \}_G \\ \{ \bar{H} \}_L \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{ F \}_G \\ \{ F \}_L \end{array} \right\} \quad (10)$$

式中: $[K]_G$ 为图 2 所示的 A 类和 B 类有效单元的导水矩阵; $[K]_L$ 为 C 类有效单元的导水矩阵。式

(10) 的形式与有限单元法中的方程形式相似, 其中的导水矩阵需要通过数值积分计算得到。

2.3 数值积分

对于 A、C 类有效单元, 直接采用常规 2 阶高斯积分即可, 对于 B 类有效单元, 因其为形状不规则的残缺单元, 可采用加密高斯点法近似得到数值积分结果。

对于界面导水矩阵, 其积分需要在界面上进行。考虑到局部网格的尺寸普遍小于整体网格, 因此, 可直接在局部网格的外表面上采用常规 2 阶高斯积分。需要注意的是, 对于局部网格的外表面上的高斯点, 还需要根据其整体坐标计算出其在整体网格中的局部坐标, 以便计算式 (9) 中的 $[N]_G$ 。

为提高数值积分的计算效率, 可单独编制专用的叠单元法前处理程序, 根据整体网格和局部网格的几何数据, 完成有效单元类型的判断、B 类有效单元的高斯点加密及判断、界面高斯点的判断等工作。

3 算例分析

根据上述基本原理, 编制了三维渗流分析中排水孔模拟的叠单元法程序及其配套前处理程序, 并分析了 2 个算例。程序中的渗流自由面确定方法采用初流量法^[12], 渗流方程组的求解采用改进的预处理共轭梯度迭代法^[13]。

3.1 单排水孔试件

图 3 为一长 10 m、宽 10 m、高 20 m 的试件, 试件中心处有一个直径为 0.1 m 的排水孔。材料渗透系数取为 10^{-6} m/s。在 $x = \pm 5$ m 的两侧给定水头

边界 $H = 20$ m, 试件的其他边界均为不透水边界。排水孔内表面为可能溢出边界。分别采用常规有限单元法和本文提出的叠单元法对该试件进行渗流分析, 网格如图 4 所示。

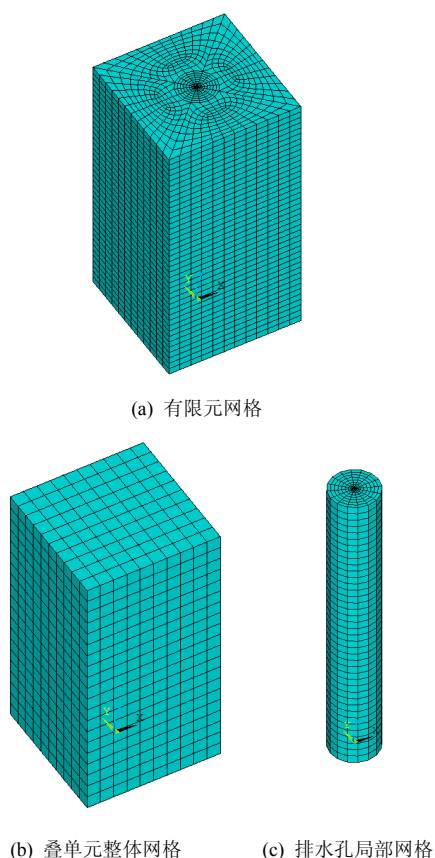
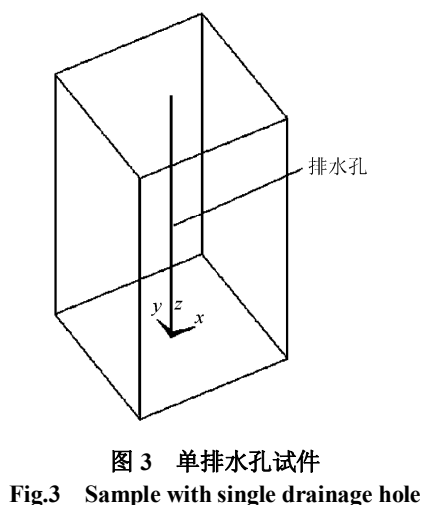


图 4 单排水孔试件的网格

Fig.4 Mesh of the sample with single drainage hole

有限单元法中, 排水孔附近的网格与叠单元法的局部网格一致, 其余部分网格则通过自由剖分得到, 总单元数为 23 680, 结点数为 25 584。叠单元法中, 排水孔局部网格的范围取直径为 2.4 m 的圆柱体, 单元数 3 840, 结点数 4 592; 整体网格通过

均匀剖分得到, 单元数为 2 000, 结点数为 2 541; 局部网格外边界面的导水系数 k_n/t 取 $10^{-3}/s$ 。

选取 $y = 0$ 断面, 分别整理两种方法计算得到的自由面及水头等值线, 如图 5 所示。由图可以看出, 叠单元法的计算结果与有限单元法的计算结果吻合很好, 在局部网格的外边界处未见明显的不连续现象。

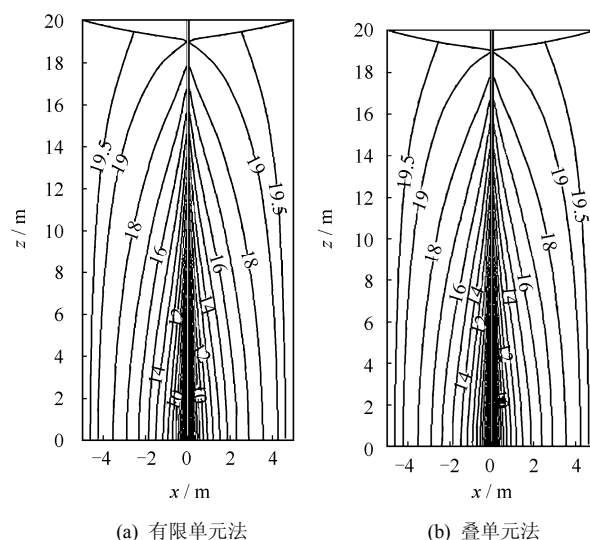


图 5 典型剖面水头等值线图 (单位: m)

Fig.5 Water head contours of typical section (unit: m)

在前面的计算分析中, 排水孔局部网格的范围大小及其外边界面的导水系数均为给定值。为揭示上述参数对叠单元法计算精度的影响规律, 下面分别对其进行敏感性分析。为便于成果描述, 选取 $z = 10$ m 平切面 (图 6) 中的 A、B 两个特征点, 其中 A 点距排水孔表面 0.12 m, B 点位于排水孔局部网格的外边界面上。

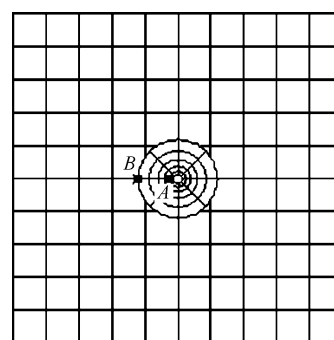


图 6 特征点位置示意图

Fig.6 Sketch of the locations of characteristic points

特征点 A 用于考察叠单元法计算结果相对于有限单元法计算结果的误差, 其相对误差计算公式为

$$\varepsilon_A = \frac{|H_{SEM} - H_{FEM}|}{H_{FEM} - z} \times 100\% \quad (11)$$

式中: H_{SEM} 、 H_{FEM} 分别为叠单元法和有限单元法计算的该点水头; z 为该点高程。特征点 B 用于考察叠单元法中的排水孔局部网格外边界面的水头连续性, 其相对误差计算公式为

$$\varepsilon_B = \frac{|H_{\text{SEM-G}} - H_{\text{SEM-L}}|}{(H_{\text{FEM}} - z)} \times 100\% \quad (12)$$

式中: $H_{\text{SEM-G}}$ 、 $H_{\text{SEM-L}}$ 分别为叠单元法中该点在整体网格和排水孔局部网格中的水头。

图 7 为排水孔局部网格的外边界面导水系数的敏感性分析结果。图中, 横坐标采用界面导水系数 k_n/t 与材料渗透系数 k 比值的对数 $\lg(k_n/tk)$; 左侧纵坐标为特征点 A 、 B 的相对误差 ε_A 、 ε_B , 代表计算精度; 右侧纵坐标为求解渗流方程组时的迭代步数, 代表计算速度。可以看出, 随着界面导水系数 k_n/t 取值的逐渐增大, 界面两侧的特征点水头连续性越来越高, 求解渗流方程组时的迭代步数也逐渐增加, 而排水孔附近特征点的水头精度则先增加后减小。显然, 如果界面导水系数 k_n/t 的取值太小, 则界面两侧的水头明显不连续, 计算精度较低; 如果界面导水系数 k_n/t 的取值太大, 则渗流方程组的性态较差, 计算速度较慢, 计算精度也较低。建议界面导水系数 k_n/t 与材料渗透系数 k 比值 $k_n/(tk)$ 取 $10^2 \sim 10^3$ 。

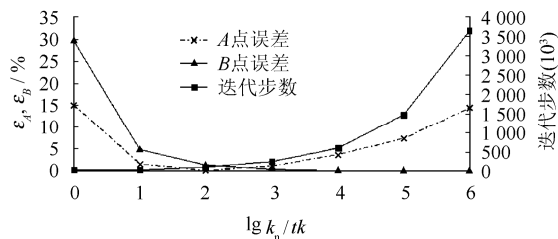


图7 界面导水系数与材料渗透系数比值对计算结果影响
Fig.7 Influence of the ratio of interface conductivity on material permeability

图 8 为排水孔局部网格范围大小的敏感性分析结果。图中的横坐标采用排水孔局部网格所在圆柱体的直径 D 与整体网格中单元尺寸 L_g 的比值 D/L_g , 纵坐标为特征点 A 的相对误差 ε_A 。由图可以看出, 当排水孔局部网格范围大于整体网格中单元尺寸时, 计算精度较高。由于排水孔局部网格范围增大会引起单元数及计算量的相应增加, 因此建议排水孔局部网格范围大小取 1~3 倍的整体网格单元尺寸。

3.2 含多层排水孔的边坡

图 9 为一边坡剖面, 坡内侧的山体地下水位为

1 350 m, 坡外侧的河流水位为 1 000 m。为降低坡体内的地下水位以保持边坡稳定, 在坡体内布置了 4 层排水洞。排水洞轴线垂直于该剖面, 各排水洞边长均为 3 m。在排水洞顶中央布置排水孔, 孔径为 0.1 m, 高 20 m, 间距为 3 m。

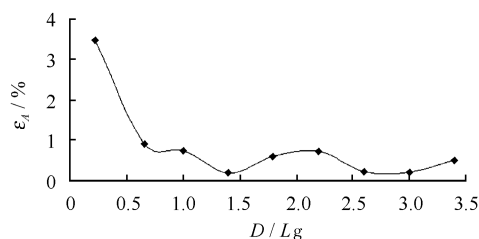


图8 排水孔局部网格范围大小对计算结果的影响
Fig.8 Influence of the range of local mesh

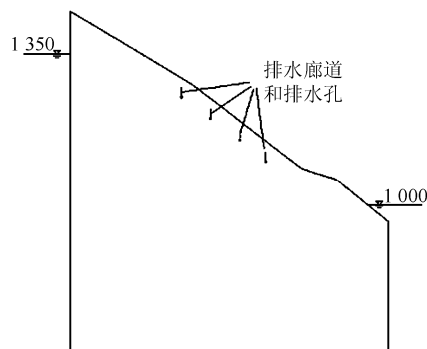


图9 边坡断面 (单位: m)
Fig.9 Section of the slope (unit: m)

沿排水洞轴线方向取 3 m 长的边坡段进行计算分析。由于各层排水洞及排水孔的尺寸相同, 因此可以任选一层排水洞及排水孔进行局部网格划分, 然后通过复制平移得到其他各层排水洞及排水孔的局部网格。整体网格及排水孔局部网格如图 10 所示。整体网格单元数为 12 800 个, 结点数 16 644 个, 其中, 边坡浅层附近的单元尺寸为 3~6 m。局部网格单元数为 11 574 个, 结点数为 17 844 个, 其中排水洞两侧边墙往外各取 6 m, 排水洞底板往下取 10 m, 排水孔顶往上取 6 m。边坡岩体渗透系数取 10^{-6} m/s, 局部网格外边界面的导水系数 k_n/t 取 10^{-3} /s。图 11 为所取边坡段的中间剖面的水头等值线图。结果表明, 排水孔的设置能够有效降低坡体内的地下水位; 自由面在排水孔处有明显跌落, 且排水孔表面的两侧溢出点不连续; 排水孔附近的水头等值线也有明显弯曲。该计算结果符合基本规律, 表明本文所提叠单元法能够用于求解含多层排水孔的复杂渗流问题。

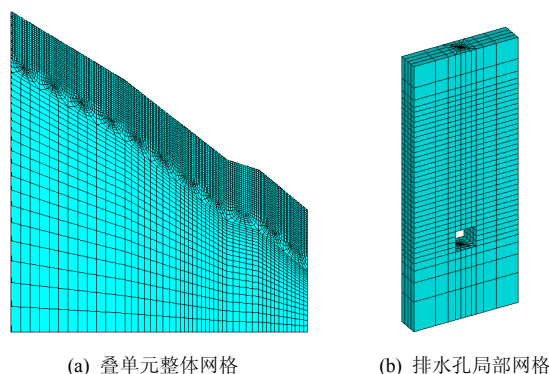


图 10 边坡网格
Fig.10 Mesh of the slope

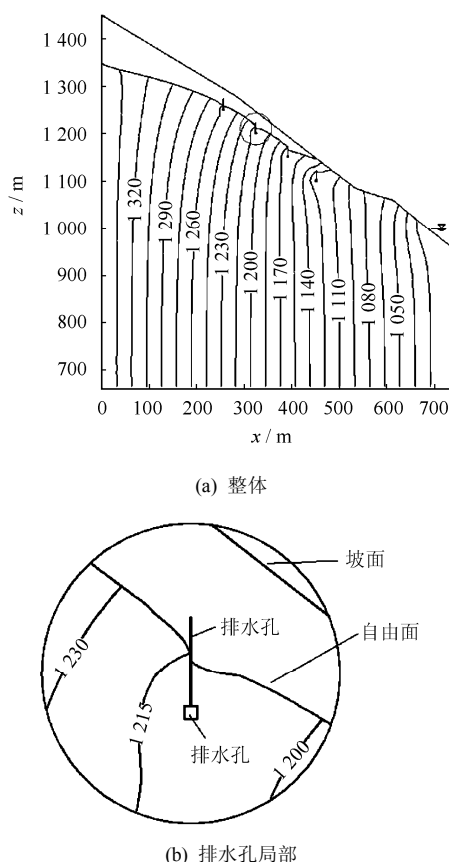


图 11 边坡水头等值线图 (单位: m)
Fig.11 Water head contours of the slope (unit: m)

4 结 语

本文提出了渗流分析中排水孔模拟的叠单元法,并结合算例分析,对排水孔局部网格的范围大小及其外边界面导水系数的取值范围作了建议。研究表明:由于叠单元法的整体网格和排水孔局部网格相互独立,使得网格离散简便易行;当排水孔局部网格范围大小取 1~3 倍的整体网格单元尺寸,且其外边界面导水系数与材料渗透系数比值取 $10^2 \sim 10^3$ 时,叠单元法的计算精度较高,因此,本文方法

有望广泛应用于复杂工程问题的渗流分析。

参 考 文 献

- [1] 关锦荷, 刘嘉炘, 朱玉侠. 用排水沟代替排水井列的有限单元法分析[J]. 水利学报, 1984, 15(3): 10—18.
GUAN Jin-he, LIU Jia-xin, ZHU Yu-xia. Finite element analysis for an array of wells replaced by a drainage ditch[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1984, 15(3): 10—18.
- [2] 毛昶熙, 李祖貽. 堤坝渗流以沟代井列的计算方法[J]. 水利学报, 1989, 20(7): 49—55.
MAO Chang-xi, LI Zu-yi. Calculation method of well row replaced by a ditch in earth dam seepage[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1989, 20(7): 49—55.
- [3] 毛昶熙, 段祥宝, 李祖貽, 等. 渗流数值计算与程序应用[M]. 南京: 河海大学出版社, 1999.
- [4] 王镭, 刘中, 张有天. 有排水孔幕的渗流场分析[J]. 水利学报, 1992, 23(4): 15—20.
WANG lei, LIU Zhong, ZHANG You-tian. Analysis of seepage field near a drainage-holes curtain[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992(4): 15—20.
- [5] 朱岳明, 陈振雷, 吴愷. 改进排水子结构法求解地下厂房洞室群区的复杂渗流场[J]. 水利学报, 1996, 23(9): 79—85.
ZHU Yue-ming, CHEN Zhen-lei, WU yin. On solution of complication seepage field in surrounding rock mass of underground power station openings[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1996, 23(9): 79—85.
- [6] CHEN S H, XU Q, HU J. Composite elements method for seepage analysis of geotechnical structures with drainage hole array[J]. *J. Hydrodynamics(Ser. B)*, 2004, 16(3): 260—266.
- [7] 许桂生, 陈胜宏. 模拟排水孔的复合单元法研究[J]. 水动力学研究与进展, 2005, 20(2): 214—220.
XU Gui-sheng, CHEN Sheng-hong. Study on the composite element method for modeling drainage holes[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2005, 20(2): 214—220.
- [8] CHEN S H, XUE L L, Shahrour L. Composite element method for the seepage analysis of rock masses containing fractures and drainage holes[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2010, 47(5): 762—770.
- [9] Fish J. The s-version of the finite element method[J]. *Computers & Structures*, 1992, 43(3): 539—547.
- [10] 汪卫明, 陈胜宏. 一种新的岩体力学数值计算方法——叠单元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(7): 1093—1098.
WANG Wei-ming, CHEN Sheng-hong. A novel numerical analysis method for rock masses—superposed element method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(7): 1093—1098.
- [11] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [12] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988, 19(8): 18—26.
ZHANG You-tian, CHEN Ping, WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988, 19(8): 18—26.
- [13] 林绍忠. 对称逐步超松弛预处理共轭梯度法的改进迭代格式[J]. 数值计算与计算机应用, 1997, (4): 266—270.
LIN Shao-zhong. Improved iterative format of symmetric successive over relaxation—precondition conjugate gradient method[J]. *Journal of Numerical Computation and Computer Application*, 1997, (4): 266—270.